Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.
(a) [0'75 puntos] Estudia la derivabilidad de f.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'75 puntos] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Solución

(a)

$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, teniendo en cuenta la definición de |x|

$x^2 - x$ es una función continua y derivable en todo $\Re$, en particular en $x > 0$
$x^2 + x$ es una función continua y derivable en todo $\Re$, en particular en $x < 0$

Veamos la continuidad de f(x) en x = 0, es decir si verifica

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 - x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 + x) = 0$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, la función f(x) es continua en x =0 y por tanto en todo $\Re$.

Estudiamos ya la derivabilidad de f(x), en particular en x =0

$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Veamos la derivabilidad en x = 0, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x - 1) = -1$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x + 1) = +1$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, f(x) no es derivable en x = 0 por lo cual es derivable en $\Re - \{0\}$

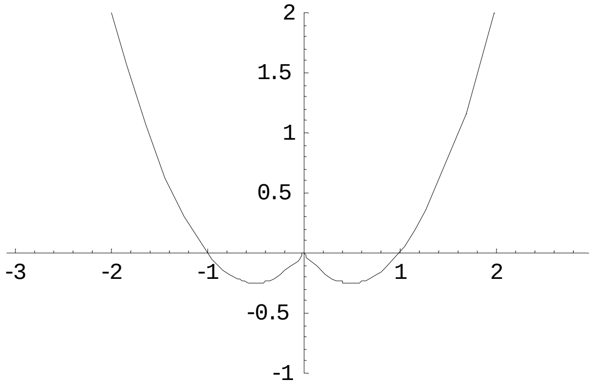
(b) y (c)

Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Si x > 0, $f'(x) = 2x - 1$. Resolvemos $f'(x) = 0$ y veremos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.
$f'(x) = 0$, nos da $2x - 1 = 0$, de donde $x = 1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.
Como $f'(0'1) = -0'8 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo (0, 1/2).
Como $f'(1) = 1 > 0$, f(x) es estrictamente creciente en el intervalo $(1/2, +\infty)$.
Por definición x = 1/2 es un mínimo relativo que vale $f(1/2) = (1/2)^2 - |1/2| = -1/4$
Si x < 0, $f'(x) = 2x + 1$.
$f'(x) = 0$, nos da $2x + 1 = 0$, de donde $x = -1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.
Como $f'(-1) = -1 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, -1/2)$.
Como $f'(-0'1) = 0'8 > 0$, f(x) es estrictamente creciente en el intervalo (- 1/2, 0).
Por definición x = - 1/2 es un mínimo relativo que vale $f(-1/2) = (-1/2)^2 - |-1/2| = -1/4$

Por definición como en (- 1/2, 0), f(x) es estrictamente creciente y en (0, 1/2), f(x) es estrictamente decreciente, x = 0 es un máximo relativo que vale f(0) = 0. (Obsérvese que en x = 0 la función no tiene derivada).

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de la función es



Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Calcula

(a) [1’5 puntos] $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx$

(b) [1 punto] $\int (2x - 3)\cdot tg(x^2 - 3x)\, dx$, siendo tg la función tangente.

Solución

(a)

$I = \int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx$ es un integral racional con el numerado de igual grado que el denominador, por tanto tenemos que efectuar previamente la división.

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 - x - 160 & x^2 - 25 \\ \hline \boxed{-5x^2 \quad + \ 125} & 5 \\ - x - 35 & \end{array}$$

Con lo cual $\frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} = 5 + \frac{-x - 35}{x^2 - 25}$

$I = \int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx = \int 5\, dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}\, dx = 5x + I_1$

$I_1 = \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}\, dx = \int \frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)}\, dx = \int \frac{A}{(x - 5)}\, dx + \int \frac{B}{(x + 5)}\, dx =$

$= A\, Ln|x - 5| + B\, Ln|x + 5|$, donde Ln es el logaritmo neperiano.

Por tanto la integral pedida es $I = 5x + I_1 = 5x + A\, Ln|x - 5| + B\, Ln|x + 5| + K$. Solo nos falta calcular las constantes A y B.

$$\frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{A}{(x - 5)} + \frac{B}{(x + 5)} = \frac{A(x + 5) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)}$$

Igualando numeradores tenemos

$-x - 35 = A(x + 5) + B(x - 5)$

Para $x = 5$ tenemos $-40 = 10A$, de donde $A = -4$

Para $x = -5$ tenemos $-30 = -10B$, de donde $B = 3$

Luego $I = 5x - 4\, Ln|x - 5| + 3\, Ln|x + 5| + K$

(b)

$\int (2x - 3)\cdot tg(x^2 - 3x)\, dx$, siendo tg la función tangente.

Recordamos que $\int tg(t)\, dt = \int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt = -Ln|cos(t)| + K$

Hacemos el cambio de variable $t = x^2 - 3x$, con lo cual $dt = (2x - 3)dx$

$\int (2x - 3)\cdot tg(x^2 - 3x)\, dx = \int tg(t)\, dt = -Ln|cos(t)| + K =$ (quitando el cambio) =

$= -Ln|cos(x^2 - 3x)| + K$

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x - y - z = -1$$

$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 2.

Solución

$$\lambda x - y - z = -1$$
$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(-1) \\ 3^aC+1^aC(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{(desarrollamos por el adjunto 31)} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(-1 - \lambda) = (\lambda - 1)(1 + \lambda)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir $(\lambda - 1)(1 + \lambda) = 0$, de donde λ = 1 y λ = -1

*Si **λ ≠ 1 y λ ≠ -1** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **λ = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(1) \\ 3^aC+1^aC(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si **λ = -1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Resuelve el sistema para λ = 2.

Nuestro sistema es

$2x - y - z = -1$

$x + 2y + z = 4$

x + y + z = 4
Sumando 1ª y 3ª tenemos 3x = 3, de donde x = 1. Tomamos la 1ª y la 2ª con x = 1
2 – y – z = -1
1 + 2y + z = 4
Sumándolas tenemos 3 + y = 3, de donde y = 0.
Sustituyendo x = 1 e y = 0 2n cualquier ecuación tenemos z = 3, por tanto la solución del sistema es (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando $\lambda = 2$

También se puede hacer por Cramer (Vicente Serrano)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10+13}{3} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11+2+4-8}{3} = 3$$

Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando $\lambda = 2$.

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación x + z = 1 y del plano π' de ecuación y – z = 3.

Solución

Pasamos la recta a vectorial. $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} = a \end{cases}$, siendo "a" un parámetro, por tanto la ecuación de la recta en vectorial es (x, y, z) = (0, 1 + a, 3 + 2a) y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta P(0,1+a,3+2a), con $a \in \Re$.
Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π', tenemos que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$

$$d(P, \pi) = \frac{|0+2a+3-1|}{\sqrt{2}};\quad d(P, \pi') = \frac{|a+1-2a-3-3|}{\sqrt{2}}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando tenemos |2a+2| = |-a - 5|, de donde salen las ecuaciones
2a+2 = -a – 5 y 2a+2 = a+5 .

De 2a+2 = -a - 5, operando sale a = -7/3 y un punto es P(0,1-7/3,3-14/3) = P(0, -4/3, -5/3)

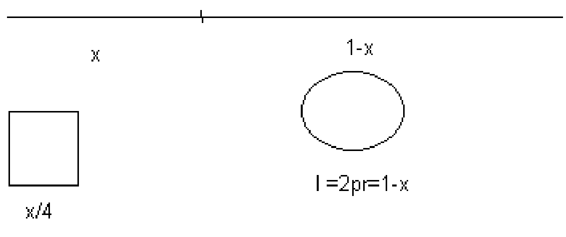
De 2a+2 = a + 5, operando sale a = 3 y el otro punto es P'(0,1+3,3+2(3)) = P'(0 ,4, 9)

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Solución



El área del cuadrado es $S_1 = (x/4)^2 = x^2/16$
La longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r = 1 – x$, de donde $r = (1-x)/2\pi$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi[(1-x)/2\pi]^2 = (1/4\pi)(x^2 – 2x + 1)$

La función a optimizar es la suma de las áreas
$S(x) = S_1 + S_2 = x^2/16 + (1/4\pi)(x^2 - 2x + 1) = (1/16\pi)(\pi x^2 + 4x^2 - 8x + 4)$

Calculamos la 1ª derivada S '(x), la igualamos a 0, calculamos la 2ª derivada para ver que efectivamente es un mínimo.
$S'(x) = (1/16\pi)(2\pi x + 8x - 8)$
$S'(x) = 0$, de donde$(2\pi x + 8x - 8) = 0$, y resolviéndolo sale $x = 4/(\pi+4)$, que será el posible mínimo.

$S''(x) = (1/16\pi)(2\pi + 8)$, de donde $S''(4/(\pi+4)) = (1/16\pi)(2\pi + 8) > 0$, por tanto $x = 4/(\pi+4)$ es un mínimo.

Los trozos en que se ha dividido el alambre tienen de longitud "x" = $4/(\pi+4)$ y "1 – x" = $1 - 4/(\pi+4) = \pi/(\pi+4)$, para que las sumas de las áreas sea mínima.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Halla la función $f: \Re \to \Re$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Solución

$f: R \to R$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$.
El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con $x \in [a,b]$ es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

En nuestro caso $f'(x) = \int f''(x)\,dx$ y también $f(x) = \int f'(x)\,dx$.

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (12x - 6)\,dx = 6x^2 - 6x + M$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (6x^2 - 6x + M)\,dx = 2x^3 - 3x^2 + Mx + N$

Veamos cuanto valen las constantes M y N.

Como la recta $y = 4x - 7$ es la recta tangente a f(x) en x = 2, sabemos que $f'(2) = 4$ que es la pendiente de la recta tangente.
Además como $y = 4x - 7$ es la recta tangente a f(x) en x = 2, en x = 2 coinciden la ordenada de la fución y la de la recta tangente, es decir $f(2) = y(2)$

De $f'(2) = 4$
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + Mx + N$
$f'(x) = 6x^2 - 6x + M$
$4 = f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + M$, con lo cual $M = -8$

De $f(2) = y(2)$
$y(2) = 4(2) - 7 = 1$
$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 8(2) + N$
Igualando $f(2) = y(2)$ tenemos $1 = 16 - 12 - 16 + N$, con lo cual $N = 13$

La función pedida es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

[2'5 puntos] Resuelve $AB^tX = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},\quad B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$AB^tX = -2C$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = M;\quad -2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = N$$

Por tanto la ecuación $AB^t X = -2C$ se nos ha transformado en MX = N con $M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como det(M) = $|M| = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 30 = -28 \neq 0$, la matriz M tiene inversa M^{-1}, y podemos multiplicar por la izquierda la ecuación MX = N por la matriz inversa de M, M^{-1},
$M^{-1}.\ MX = M^{-1}.N$, es decir $X = M^{-1}.N$
Recordamos que $M^{-1} = (1/|M|).\ Adj(M^t)$

$M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $M^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, $Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$,

$M^{-1} = (1/|M|).\ Adj(M^t) = (1/-28).\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix}$

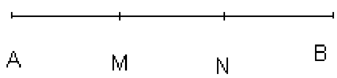
Por tanto $X = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ 5/14 & 3/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 2 (Sept.) de sobrantes de 2006

Considera los puntos A(1,0,-2) y B(-2,3,1)
(a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación -x = y – 1 = z. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

Solución

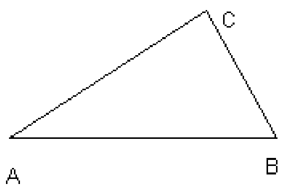
(a)



A(1,0,-2) y B(-2,3,1)
Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**
AB = (-3,3,3)
AM = (x-1,y,z+2)
De **AB** = 3**AM** obtenemos (-3,3,3) = (3x-3,3y,3z+6), e igualando miembro a miembro se tiene x = 0, y = 1 y z = -1, es decir el punto M es M(x,y,z) = M(0,1,-1)
También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir
N(x,y,z)= N(-2/2, (1+3)/2, (-1+1)/2) = N(-1,2,0)

(b)
Antes de calcular el área del triángulo de vértices A, B y C ponemos la recta r en forma continua *¡¡cuidado, pues no me la han dado en forma continua!!*

-x = y – 1 = z en forma continua es x/(-1) = (y-1)/1 = z/1.
Un punto de la recta es C(0,1,0) y un vector director de la recta es **u** = (-1,1,1)



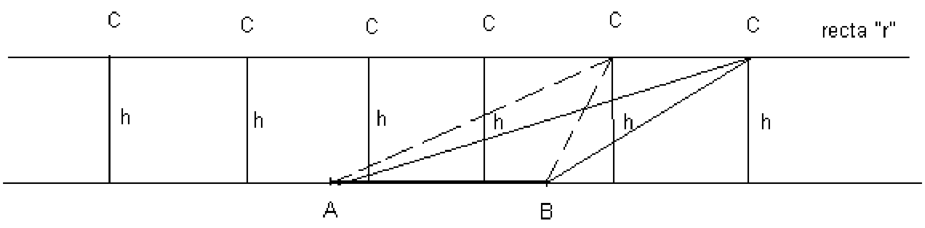
Recordamos que el área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.
Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||
AB = (-3,3,3)
AC = (-1,1,2)

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(-3) + \mathbf{k}(0) = (3,3,0)$$

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$

Para responder a la pregunta ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C? hay que recordar también que el área de un triángulo es 1/2 del producto de la base (en nuestro caso el módulo del vector **AB**) por la altura.

Resulta que la recta r que me han dado x/(-1) = (y-1)/1 = z/1 es paralela al segmento AB,, puesto que el vector director de la recta es **u** = (-1,1,1) y el vector **AB** = (-3,3,3), que como observamos son proporcionales.
Evidentemente el segmento AB no está contenido en la recta porque en dicho caso no se podría formar triángulo y nos resultaría el área 0.
Al ser la recta "r" paralela al segmento AB, la altura de cualquier punto C de la recta trazada sobre la recta que contiene al segmento AB siempre es la misma, por tanto el área del triángulo siempre es $\frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, independientemente del punto de la recta que tomemos.



Área = (1/2)(base)(altura) = (1/2)||**AB**||.h, y "h" no varía sea cual sea el punto C de la recta "r".

Otra forma de hacerlo (Javier Costillo)

Consideramos un punto C genérico de la recta - x = y – 1 = z = a con "a" número real.
C(x,y,z) = C(-a, 1+a, a)

Si en el cálculo del área del triángulo vemos que no depende del parámetro "a", entonces el área será la misma independientemente del punto C de la recta que tomemos

A(1,0,-2) y B(-2,3,1)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||
AB = (-3,3,3)
AC = (-a - 1,1 + a, a + 2)

$$\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -a-1 & 1+a & a+2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3a+6-3-3a) - \mathbf{j}(-3a - 6 + 3a + 3) + \mathbf{k}(-3 -3a + 3a + 3) = (3,3,0)$$

Área triángulo = (1/2)·||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, que no depende del parámetro "a", y por tanto tampoco del punto C tomado.